

# Résumé des travaux

Walid BELKHIR

## Intérêts de recherche

- Informatique: Vérification des systèmes concurrents, sémantique des langages de programmation, automates temporisés.
- Logique:  $\mu$ -calcul,  $\mu$ -treillis, logique de point fixe, théories des jeux.
- Combinatoire: théorie structurelle des graphes, mesure de complexités des graphes, jeux de capture dans les graphes (graph searching).

## La thèse de doctorat

**Les  $\mu$ -treillis.** Dans la première partie de ma thèse de doctorat j'ai étudié la théorie des  $\mu$ -treillis. Cette théorie est une extension de la théorie des treillis par les opérateurs de plus petit point fixe  $\mu$  et plus grand point fixe  $\nu$ . En effet la théorie des  $\mu$ -treillis peut être considéré comme un  $\mu$ -calcul au sens d'Arnold et Niwiński [1]. L'étude de cette théorie se base essentiellement sur la description combinatoire - en termes de jeux et de stratégies gagnantes - des objets libres dans les modèles de cette théorie, c'est ce qu'on appelle les  $\mu$ -treillis [20].

**Sémantique des langage de programmation.** L'intérêt de l'étude de la théorie des  $\mu$ -treillis se manifeste à travers l'étude de la *sémantique des langages de programmation*. Dans l'approche établie par A. Joyal [15] les stratégies gagnantes dans les jeux associés aux  $\mu$ -treillis libres modélisent des protocoles permettant la communication asynchrone via des canaux de communication synchrones.

**Jeux de parité et vérification** La version combinatoire des  $\mu$ -treillis libres n'est rien d'autre que les *jeux de parité* avec information parfaite sur des graphes finis. Il est bien connu que le model-checking du  $\mu$ -calcul propositionnel modal [16] se réduit au problème de résoudre des jeux de parité [12]. D'une autre part, les jeux de parité sont un outils de *vérifications* des systèmes concurrents avec comportements infinis. L'un des principaux thème de mon travail est le lien entre *complexité logique* et *complexité algorithmique* des jeux de parité.

**Le pouvoir expressifs dans les logiques de point fixe.** Le premier résultat principal de ma thèse, qui faisait l'objet de l'article [7] et sa version longue [8], montre que la hiérarchie de variables des  $\mu$ -treillis est infinie. Autrement dit, le "pouvoir expressif" des  $\mu$ -treillis accroît selon le nombre de variables liées; les opérateurs  $\mu$  et  $\nu$  se comportent comme des quantificateurs logiques et introduisent "une complexité logique". Un résultat similaire dans le cas du  $\mu$ -calcul modal a été obtenu par Berwanger, Grädel et Lenzi [10].

**Fragment additif de la logique linéaire + point fixe.** Précisons que la théorie des  $\mu$ -treillis n'est rien d'autre que le *fragment additif* de la logique linéaire [13] où on a rajouté les deux opérateurs  $\mu$  et  $\nu$  aux formules. Une stratégie gagnante dans un jeu  $G_1 \times G_2$  est une preuve sans coupure du séquent  $G_1 \vdash G_2$ . Il est à noter que le graphe associé au séquent  $G_1 \vdash G_2$  n'est plus un arbre mais un graphe avec cycles.

**Type inductifs et co-inductifs.** Les  $\mu$ -treillis (où encore leur version combinatoire i.e. les jeux de parité) peuvent modéliser les types inductifs et co-inductifs d'une manière assez naturelle. Rappelons que l'opérateur  $\mu$  représente la *réursion* et l'opérateur  $\nu$  représente la *co-réursion*. Une stratégie gagnante dans un jeux de parité  $G$  donc s'interprète par le fait que le type défini par le jeu  $G$  n'est pas vide. On pourra donner une interprétation du résultat [8] comme suit: *la simplification structurelle au niveau des jeux de parité qui définissent les types inductifs et co-inductifs est impossible en général.*

**Graphes et mesures de complexité.** L'étude de la hiérarchie de variable dans le cas du  $\mu$ -calculs modal a dégagé une mesure de complexité des graphes: c'est *l'enchevêtrement*<sup>1</sup> [9]. Dans la deuxième partie de ma thèse, je me suis intéressé à l'enchevêtrement considéré comme propriété des graphes tout en laissant les motivations logiques en arrière plan. La question cruciale était la suivante: *peut on donner des caractérisations structurelles des graphes d'enchevêtrement borné en terme de mineurs exclus, et/ou de constructions explicites à partir des petits graphes et des opérateurs algébriques appropriés?* L'article [6] répond à cette question dans le cas des graphes *non orientés* d'enchevêtrement 2. En se basant sur cet article, Rabinovich et Grädel ont généralisé ce résultat pour le cas *dirigé* (d'enchevêtrement 2 bien sure) dans [17]. En exploitant la *décomposition de Tutte*, j'ai partiellement étendu le résultat [6] pour les graphes non orientés d'enchevêtrement 3 [4, 3]. L'approche que j'ai suivit consiste à une étude comparative entre l'enchevêtrement et les autre mesure de complexité des graphes telles que la connexité [22], la cyclicité et la couverture minimales des arrêtes.

Dans [5] j'ai montré que la classe des graphes non orientés est fermée par mineur. Il découle du célèbre théorème de Roberston et Seymour [18] la finitude des mineurs exclus qui caractérisent la classe des graphes d'enchevêtrement borné.

## Après la thèse ...

**Automates temporisés et sémantique de vraie parallélisme.** L'étude des systèmes critiques en général et des applications temps réel en particulier fait de plus en plus appel à des méthodes formelles permettant de répondre aux exigences aux quelles sont soumises ces applications. L'étude du comportement logique de ces applications implique l'utilisation de modèles de spécification et de vérification dans lesquels les relations temporelles entre occurrences d'actions se réduisent à l'étude de la chronologie d'exécution de ces actions, seules pouvant être vérifiées des propriétés qualitatives et non pas des propriétés quantitatives comme le respect de contraintes temporelles et de performances minimales. Il a été montré que la levée de l'hypothèse d'atomicité des actions dans les modèles de spécification nécessite l'utilisation de sémantiques du vrai parallélisme [11, 14, 19, 21] à la place de la sémantique classique d'entrelacement. Dans [2] j'ai étendu les systèmes de transitions causaux<sup>2</sup> de [11] avec la notion d'horloge et de contrainte temporisée, donnant lieu a une surclasse des automates temporisés où les actions ne sont pas forcément atomiques (i.e. de durée nulle). Une version temporisée de la technique de description formelle CSP a été définie ainsi que sa sémantique sur la classe des systèmes de transitions causaux temporisés. Ensuite, la notion de *raffinement d'action*, i.e. le remplacement d'une action par un processus, a été étudiée en tenant en compte l'aspect temporisé et la sémantique de causalité.

---

<sup>1</sup>Entanglement en anglais.

<sup>2</sup>ce sont des systèmes de transitions enrichis avec la relation de causalité

## References

- [1] A. Arnold and D. Niwiński. *Rudiments of  $\mu$ -calculus*, volume 146 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland, 2001.
- [2] Walid Belkhir. From causal semantics to duration timed models. Submitted, <http://arxiv.org/abs/0907.3226>.
- [3] Walid Belkhir. On the tree decomposition of entanglement 3 (extended abstract). In the proceeding of the 39<sup>th</sup> Annual Iranian Mathematics Conference, Kerman 2008.
- [4] Walid Belkhir. Undirected graphs of entanglement 3. Submitted, <http://arxiv.org/abs/0904.1696>.
- [5] Walid Belkhir. Closure under of undirected entanglement, March 2008. Submitted, <http://arxiv.org/abs/0904.1703>.
- [6] Walid Belkhir and Luigi Santocanale. Undirected graphs of entanglement 2. In *FSTTCS 2007*, volume 4855 of *Lect. Not. Comp. Sci.*, pages 508–519. Springer.
- [7] Walid Belkhir and Luigi Santocanale. The variable hierarchy for the lattice  $\mu$ -calculus. In Iliano Cervesato, Helmut Veith, and Andrei Voronkov, editors, *LPAR 2008*, *Lect. Not. Comp. Sci.*, pages 605–620, 2008.
- [8] Walid Belkhir and Luigi Santocanale. The variable hierarchy for the games  $\mu$ -calculus. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161:690–707, 2010.
- [9] Dietmar Berwanger and Erich Grädel. Entanglement—a measure for the complexity of directed graphs. In *LPAR 2005*, volume 3452 of *LNCS*, pages 209–223.
- [10] Dietmar Berwanger, Erich Grädel, and Giacomo Lenzi. The variable hierarchy of the  $\mu$ -calculus is strict. *Theory Comput. Syst.*, 40(4):437–466, 2007.
- [11] R. J. Coelho Da Costa. *Systèmes de transitions étiquetés causaux: une nouvelle approche pour la description du comportement événementiel de systèmes concurrents*. PhD thesis, Université de Toulouse 3, 1993.
- [12] E. Allen Emerson and Chin-Laung Lei. Efficient model checking in fragments of the propositional  $\mu$ -calculus (extended abstract). In *LICS*, pages 267–278, 1986.
- [13] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoret. Comput. Sci.*, 50(1):101, 1987.
- [14] R.J. Glabbeek. *Comparative Concurrency Semantics and Refinement of Actions*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1990.
- [15] A. Joyal. Free lattices, communication and money games. In *Logic and scientific methods (Florence, 1995)*, volume 259 of *Synthese Lib.*, pages 29–68. Kluwer Acad. Publ., 1997.
- [16] Dexter Kozen. Results on the propositional  $\mu$ -calculus. *Theoret. Comput. Sci.*, 27(3):333–354, 1983.
- [17] Roman Rabinovich. *Complexity Measures for Directed Graphs*. Diplomarbeit, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, August 2008. <http://www.logic.rwth-aachen.de/People/Rabinovich/diplomarbeit.pdf>.
- [18] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. Wagner’s conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.
- [19] D. Saidouni. *Sémantique de maximalité: application au raffinement d’actions dans LOTOS*. PhD thesis, Université de Toulouse 3, 1996.
- [20] Luigi Santocanale. Free  $\mu$ -lattices. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 168(2-3):227–264, March 2002.
- [21] Djamel-Eddine Saïdouni and Jean pierre Courtiat. Syntactic action refinement in presence of multiway synchronization. In *In proc. of the workshop on Semantics of Specification Languages (SoSL’93)*, pages 289–303. Springer Verlag, 1994.

- [22] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs*. Mathematical Expositions, No. 15. University of Toronto Press, Toronto, Ont., 1966.