La coupe maximum : un jeu tranchant pour les équilibres forts !

Jérôme Monnot

CNRS - LAMSADE Université Paris Dauphine
Projet ANR COCA ANR-09-JCJC-0066-01
en collaboration avec Laurent Gourvès

20 Novembre

Contenu

Quelques définitions :

- La coupe maximum
- Le jeu stratégique associé
- Equilibre pur de Nash
- Equilibre fort

Contenu

Quelques définitions :

- La coupe maximum
- Le jeu stratégique associé
- Equilibre pur de Nash
- Equilibre fort

Pour le jeu MAX CUT :

- Le prix fort de l'anarchie
- Existence et complexité d'équilibre fort

Contenu

Quelques définitions :

- La coupe maximum
- Le jeu stratégique associé
- Equilibre pur de Nash
- Equilibre fort

Pour le jeu MAX CUT :

- Le prix fort de l'anarchie
- Existence et complexité d'équilibre fort

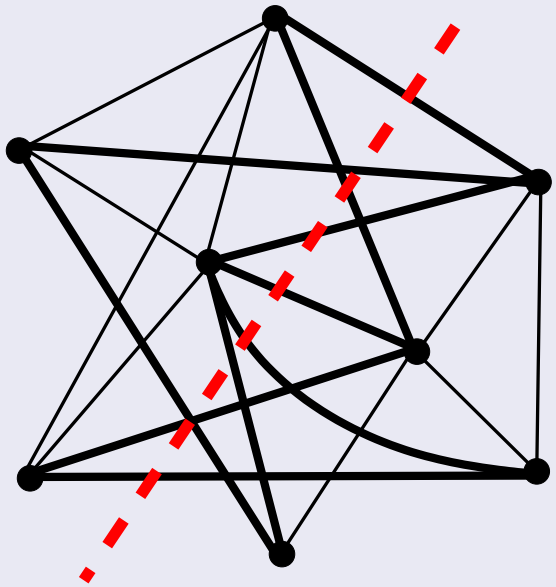
Au-delà : quand les difficultés apparaissent pour le jeu MAX 3-CUT

MAX CUT

Données :

- un graphe simple $G = (V, E)$
- chaque arête e possède un poids $w(e)$ positif ou nul

But : partitionner V en deux afin de maximiser le poids des arêtes de la coupe



coupe

ensemble des arêtes ayant une extrémité dans chaque partie

problème NP-difficile

MAX CUT : le jeu

Données

- chaque sommet du graphe est un joueur
- le poids d'une arête définit l'**antipathie** entre les deux joueurs
  - plus le poids de l'arête $[i, j]$ est grand, moins i et j s'apprécient
  - convention : pas d'arête entre $[i, j]$ = arête de poids 0

MAX CUT : le jeu

Données

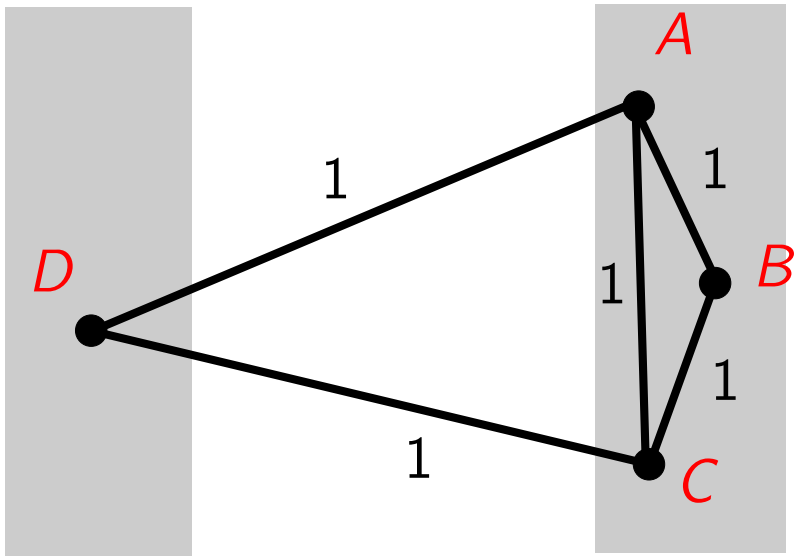
- chaque sommet du graphe est un joueur
- le poids d'une arête définit l'**antipathie** entre les deux joueurs
  - plus le poids de l'arête $[i, j]$ est grand, moins i et j s'apprécient
  - convention : pas d'arête entre $[i, j]$ = arête de poids 0

Jeu stratégique

- chaque joueur choisit soit la partie 1 soit la partie 2
- utilité d'un joueur : somme des poids des arêtes de la coupe qui lui sont incidentes

Exemple d'application

4 pensionnaires : Alice, Bob, Charles et Dorothée et deux dortoirs



Dortoir 1 Dortoir 2

utilité de $A = 1$ utilité de $B = 0$

utilité de $C = 1$ utilité de $D = 2$

Issues du jeu et bien-être social

On observe les **états stables** du jeu, i.e. ceux que les joueurs ne peuvent **rationnellement** remettre en cause

L'équilibre de Nash est une définition *possible* d'un état stable

Equilibre de Nash pur : Chaque joueur choisit une partie de façon déterministe et n'a pas intérêt à en changer de façon unilatérale

Issues du jeu et bien-être social

On observe les **états stables** du jeu, i.e. ceux que les joueurs ne peuvent **rationnellement** remettre en cause

L'équilibre de Nash est une définition *possible* d'un état stable

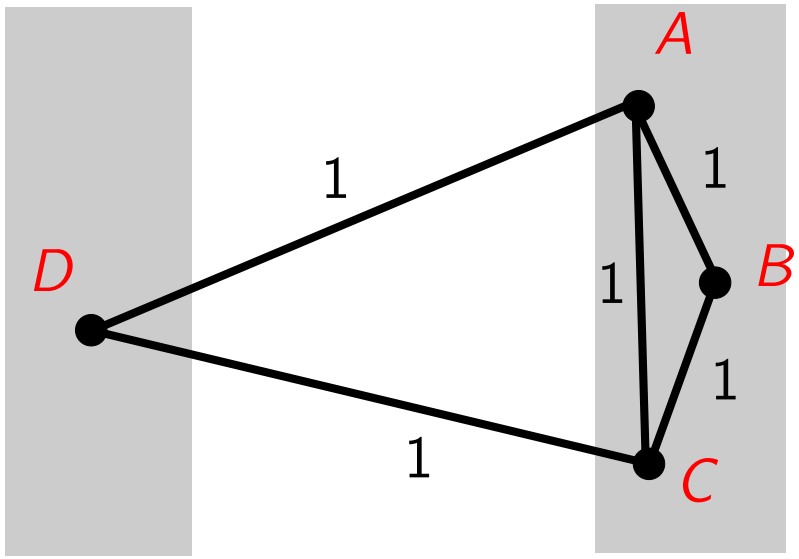
Equilibre de Nash pur : Chaque joueur choisit une partie de façon déterministe et n'a pas intérêt à en changer de façon unilatérale

Le poids de la coupe induite définit le *bien-être social*

une coupe de poids maximum correspond à

- un optimum social
- un équilibre de Nash

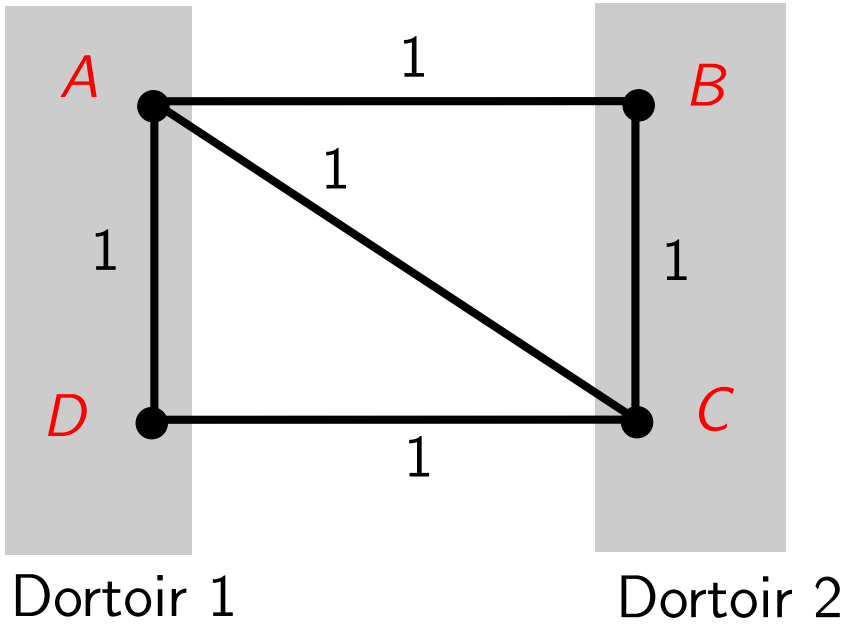
Retour sur l'exemple



Pas un équilibre de Nash car Alice, Bob ou Charles ont intérêt à changer unilatéralement de dortoir pour augmenter leur utilité

bien-être social de 2

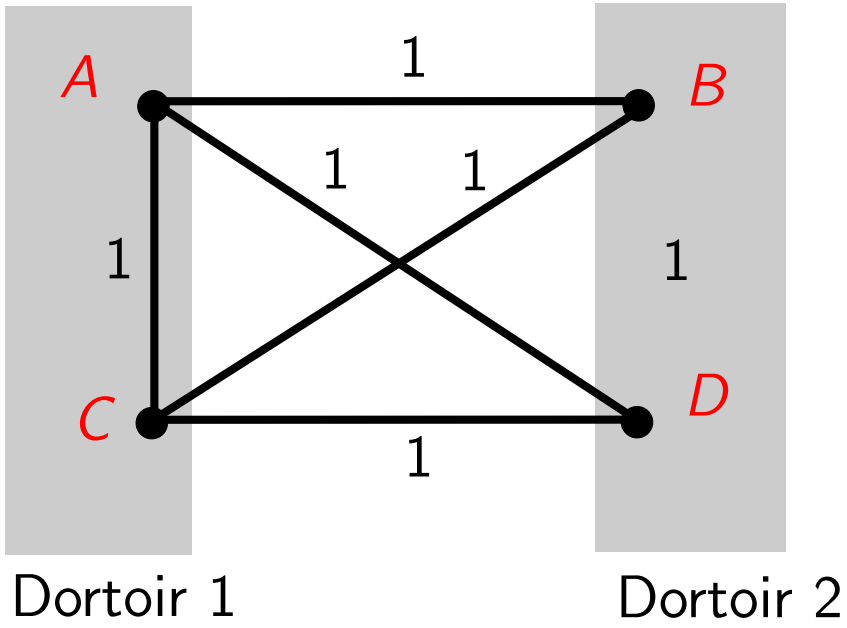
Retour sur l'exemple



Equilibre de Nash

bien-être social de 3 ... mais pas un optimum social

Retour sur l'exemple



Equilibre de Nash

bien-être social de 4 ... optimum social

Prix de l'anarchie

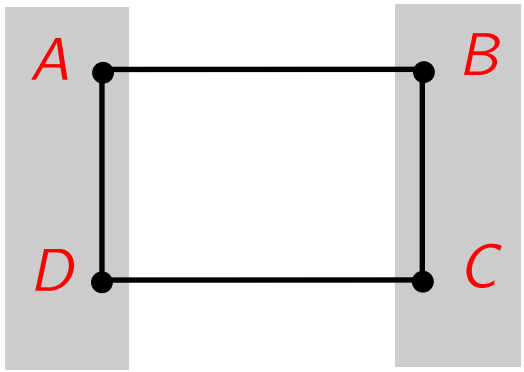
PoA

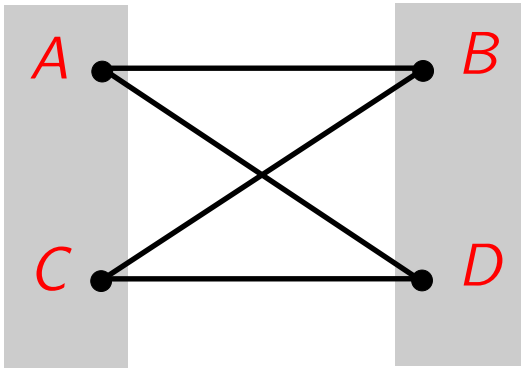
Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre et l'optimum social [Koutsoupias, Papadimitriou, STACS 99]

Prix de l'anarchie

PoA

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre et l'optimum social [Koutsoupias, Papadimitriou, STACS 99]

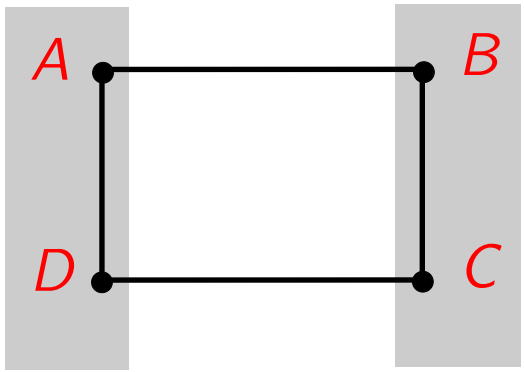


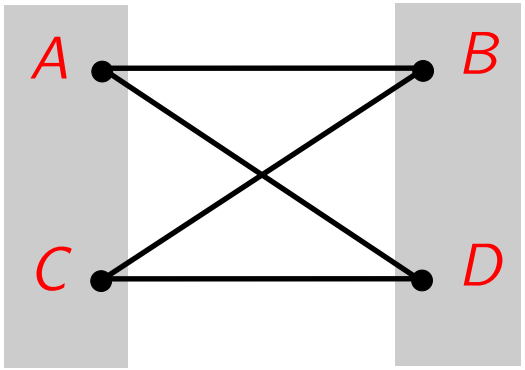


Prix de l'anarchie

PoA

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre et l'optimum social [Koutsoupias, Papadimitriou, STACS 99]





Folklore

Pour le jeu max CUT, le prix de l'anarchie est 1/2 : analogie au rapport d'approximation 1/2 de la recherche locale

Définition plus formelle du jeu

Jeu stratégique

- n joueurs $v \in V$
- chaque joueur a pour ensemble de stratégies $\{1, 2\}$
- un état du jeu σ appartient à $\{1, 2\}^n$
- $\sigma(v)$ est la stratégie adoptée par le joueur v dans l'état σ
- $u_v : \{1, 2\}^n \to \mathbb{R}^+$, *utilité* d'un joueur v

Définition plus formelle du jeu

Jeu stratégique

- n joueurs $v \in V$
- chaque joueur a pour ensemble de stratégies $\{1, 2\}$
- un état du jeu σ appartient à $\{1, 2\}^n$
- $\sigma(v)$ est la stratégie adoptée par le joueur v dans l'état σ
- $u_v : \{1, 2\}^n \to \mathbb{R}^+$, *utilité* d'un joueur v

Utilité

Soit (G, w) avec $G = (V, E)$ et $\forall e \in E$, $w(e) \in \mathbb{R}^+$. L'utilité du joueur $v \in V$ est : $u_v(\sigma) = \sum_{v' \in V : \sigma(v') \neq \sigma(v)} w([v, v'])$

Définition plus formelle du jeu

Jeu stratégique

- n joueurs $v \in V$
- chaque joueur a pour ensemble de stratégies $\{1, 2\}$
- un état du jeu σ appartient à $\{1, 2\}^n$
- $\sigma(v)$ est la stratégie adoptée par le joueur v dans l'état σ
- $u_v : \{1, 2\}^n \to \mathbb{R}^+$, *utilité* d'un joueur v

Utilité

Soit (G, w) avec $G = (V, E)$ et $\forall e \in E$, $w(e) \in \mathbb{R}^+$. L'utilité du joueur $v \in V$ est : $u_v(\sigma) = \sum_{v' \in V : \sigma(v') \neq \sigma(v)} w([v, v'])$

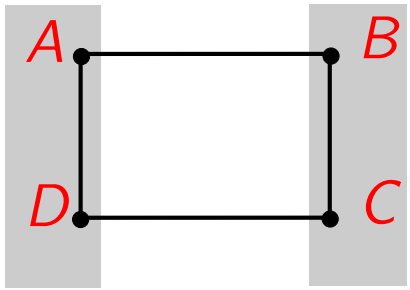
Bien-être social

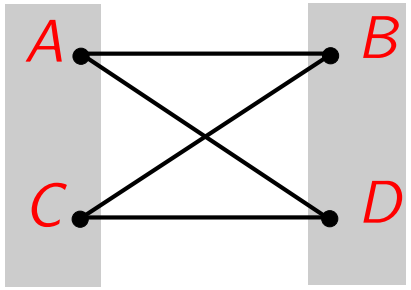
Le bien-être social (social welfare) $sw(\sigma)$ de l'état σ est :

$$sw(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} u_v(\sigma)$$

Un équilibre pas si stable

On peut remettre en cause la stabilité de l'équilibre de Nash

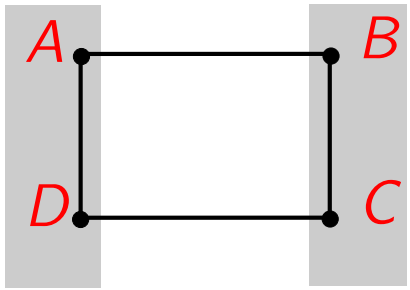


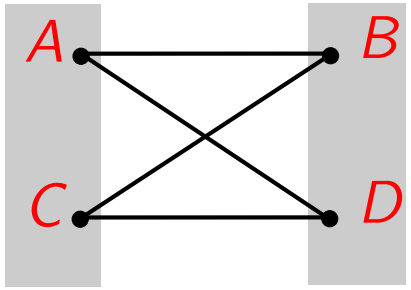


Alice et Bob peuvent se concerter. S'ils permutent leurs positions alors ils y gagnent tous les deux.

Un équilibre pas si stable

On peut remettre en cause la stabilité de l'équilibre de Nash





Alice et Bob peuvent se concerter. S'ils permutent leurs positions alors ils y gagnent tous les deux.

Equilibre fort

Etat stable dont aucune coalition de joueurs ne peut dévier et tous les membres de la coalition y gagnent

SPoA : Prix fort de l'anarchie

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre fort et l'optimum social [Andelman, Feldman et Mansour, SODA 07]

Trois questions autour du jeu MAX CUT

SPoA : Prix fort de l'anarchie

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre fort et l'optimum social [Andelman, Feldman et Mansour, SODA 07]

Pour le jeu MAX CUT, nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

Trois questions autour du jeu MAX CUT

SPoA : Prix fort de l'anarchie

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre fort et l'optimum social [Andelman, Feldman et Mansour, SODA 07]

Pour le jeu MAX CUT, nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

- Existence d'un équilibre fort pour tout graphe G ?

Trois questions autour du jeu MAX CUT

SPoA : Prix fort de l'anarchie

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre fort et l'optimum social [Andelman, Feldman et Mansour, SODA 07]

Pour le jeu MAX CUT, nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

- Existence d'un équilibre fort pour tout graphe G ?
- Complexité pour trouver un tel équilibre ?

Trois questions autour du jeu MAX CUT

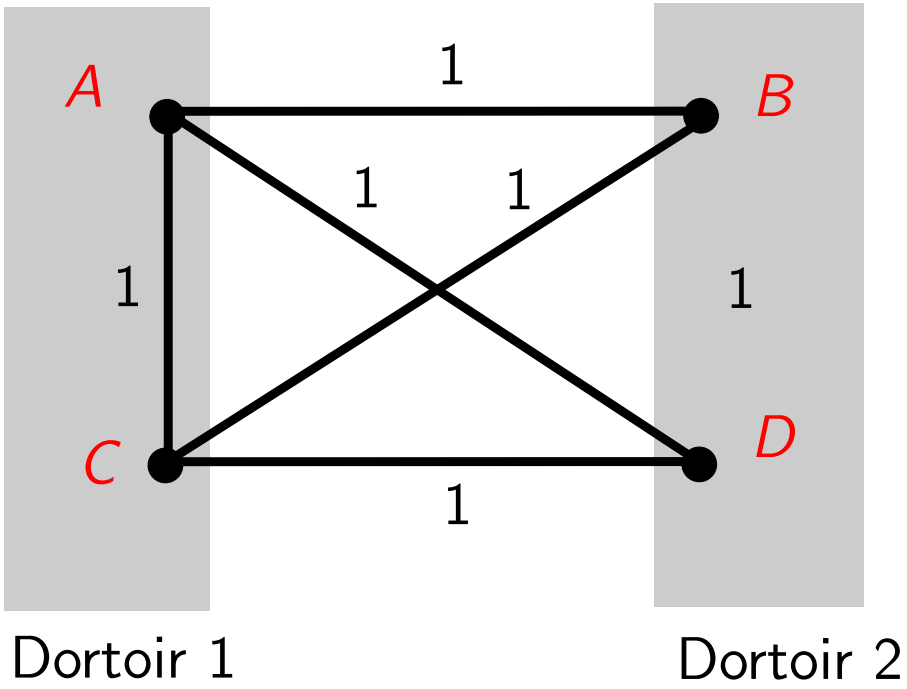
SPoA : Prix fort de l'anarchie

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre fort et l'optimum social [Andelman, Feldman et Mansour, SODA 07]

Pour le jeu MAX CUT, nous souhaitons répondre aux questions suivantes :

- Existence d'un équilibre fort pour tout graphe G ?
- Complexité pour trouver un tel équilibre ?
- Quel est le prix fort de l'anarchie pour ce jeu ?

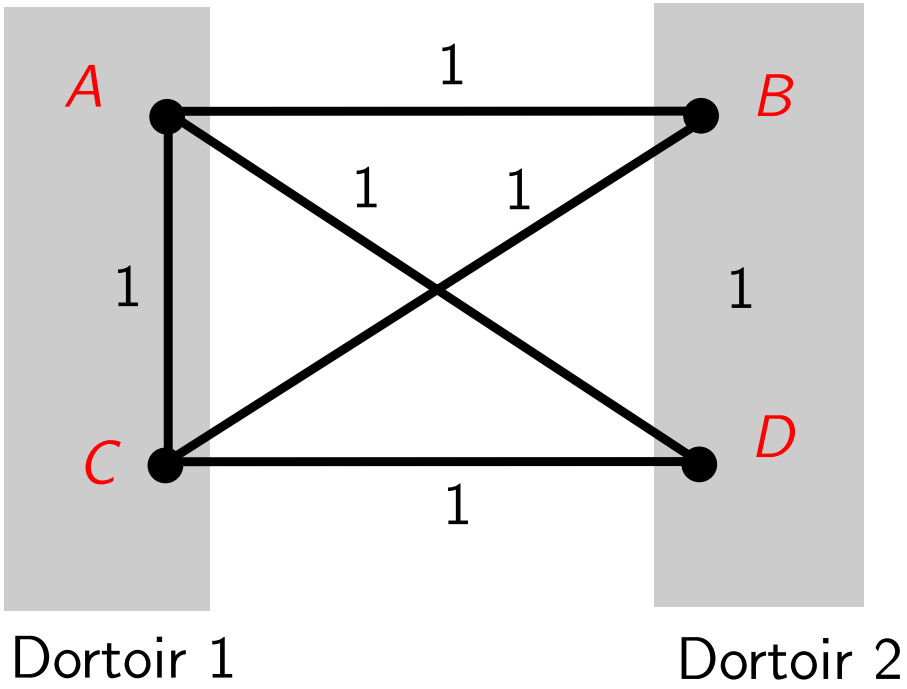
Equilibre fort : existence



Théorème

Pour le jeu max CUT, un équilibre fort existe toujours.

Equilibre fort : existence



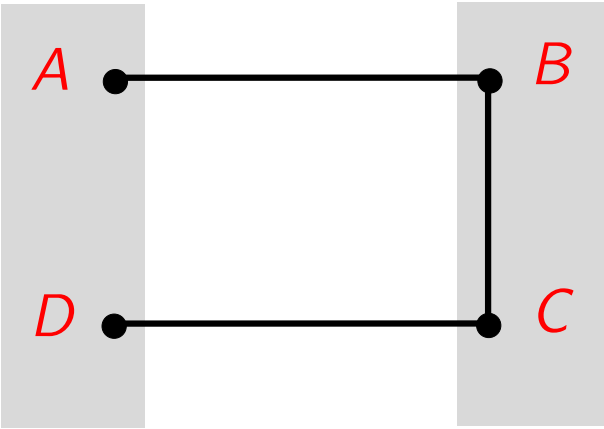
Théorème

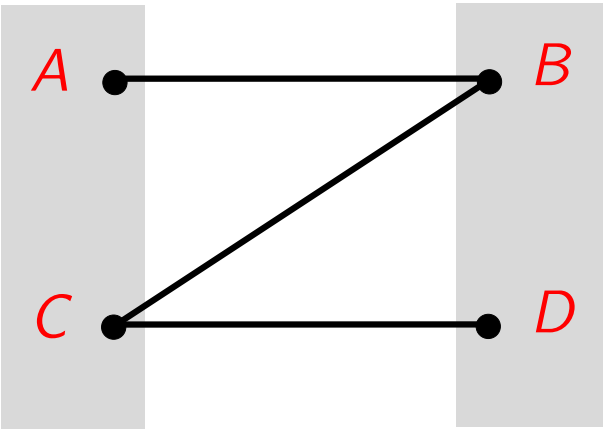
Pour le jeu max CUT, un équilibre fort existe toujours.

Une coupe optimale est un équilibre fort !

Equilibre fort : théorèmes

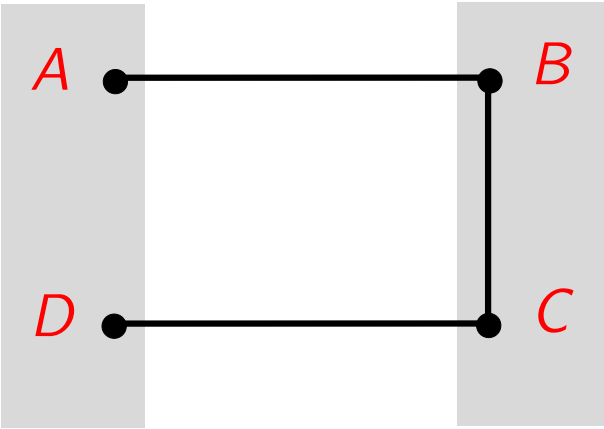
- σ est un équilibre fort de valeur $STRONG$.
- σ^* est un état optimal de valeur OPT

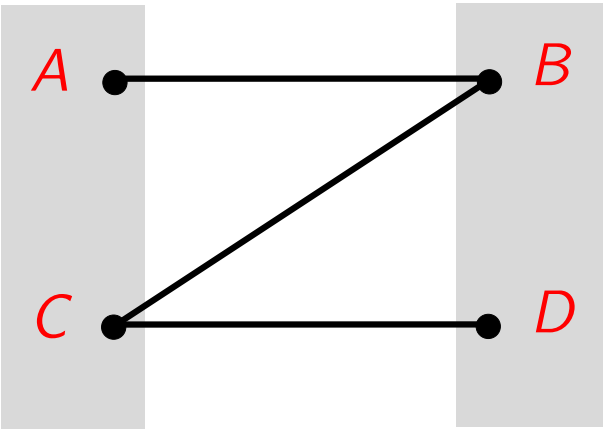




Equilibre fort : théorèmes

- σ est un équilibre fort de valeur $STRONG$.
- σ^* est un état optimal de valeur OPT





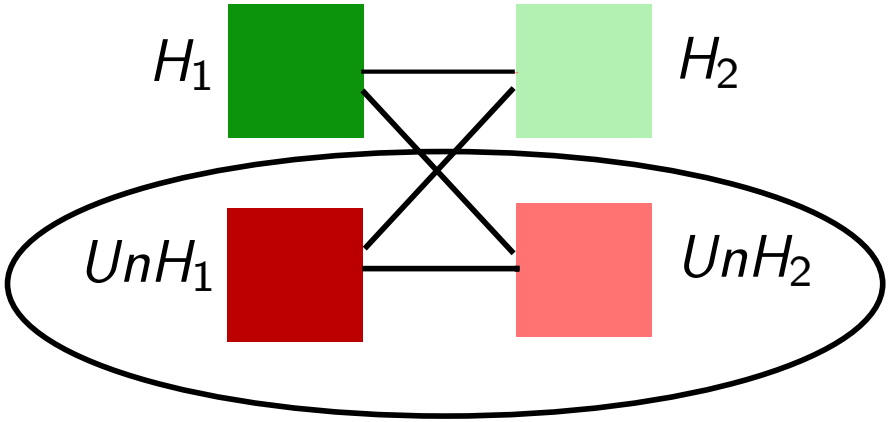
Théorème

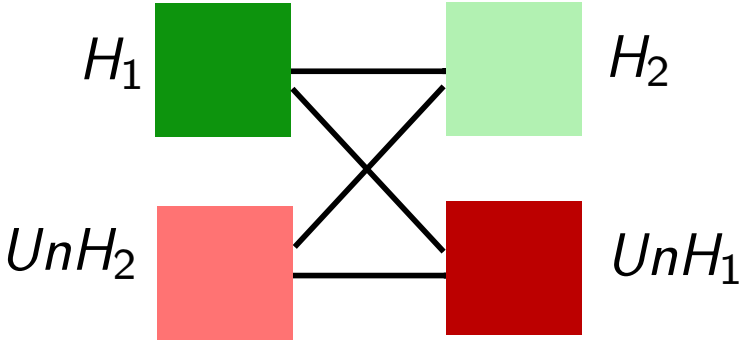
Pour le jeu max CUT, le prix fort de l'anarchie est 2/3.

Intuition 1/5

Quelques notations :

- $H = \{v : \sigma_v = \sigma_v^*\}$ et $UnH = \{v : \sigma_v \neq \sigma_v^*\}$.
- Pour $i \in \{1, 2\}$, $H_i = H \cap X_i$ et $UnH_i = H \cap X_i$ où $v \in X_i$ signifie $\sigma(v) = i$.
- $w(V', V'') = \sum_{[x,y] \in E \cap V' \times V''} w([x, y])$.

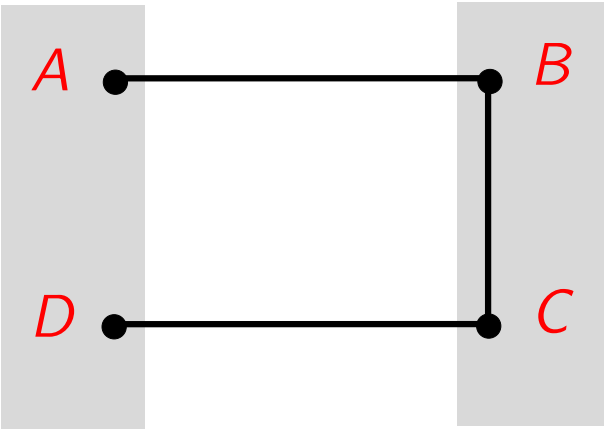


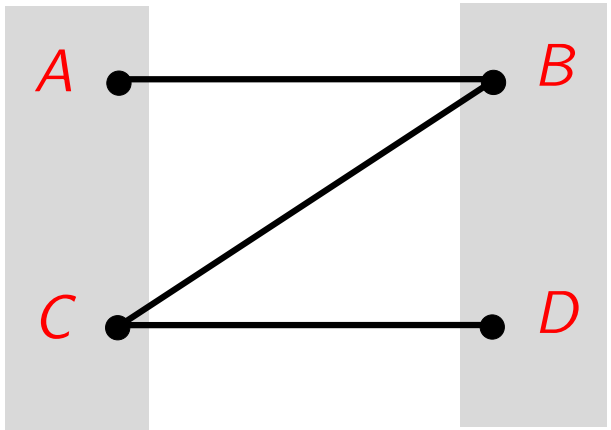


Intuition 1/5

Quelques notations :

- $H = \{v : \sigma_v = \sigma_v^*\}$ et $UnH = \{v : \sigma_v \neq \sigma_v^*\}$.
- Pour $i \in \{1, 2\}$, $H_i = H \cap X_i$ et $UnH_i = H \cap X_i$ où $v \in X_i$ signifie $\sigma(v) = i$.
- $w(V', V'') = \sum_{[x,y] \in E \cap V' \times V''} w([x, y])$.

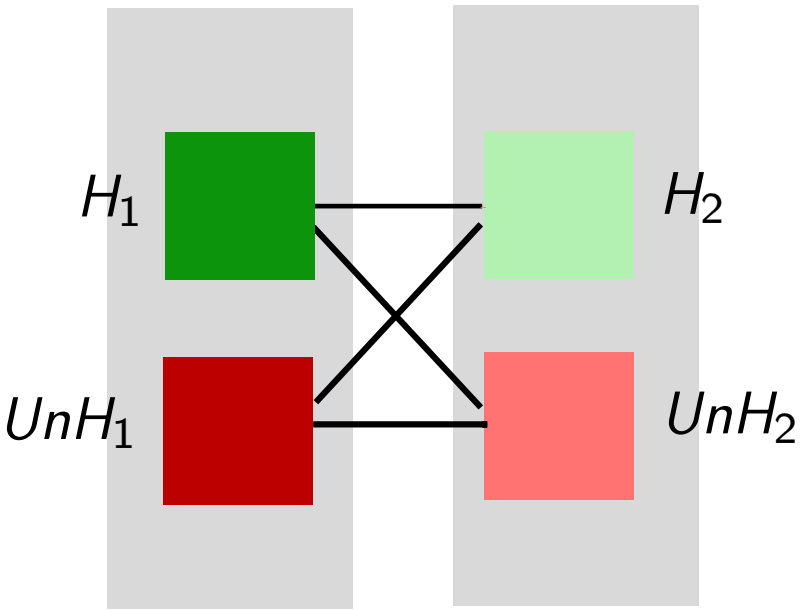




$H_1 = \{A\}$, $H_2 = \{B\}$, $UnH_1 = \{D\}$ et $UnH_2 = \{C\}$.

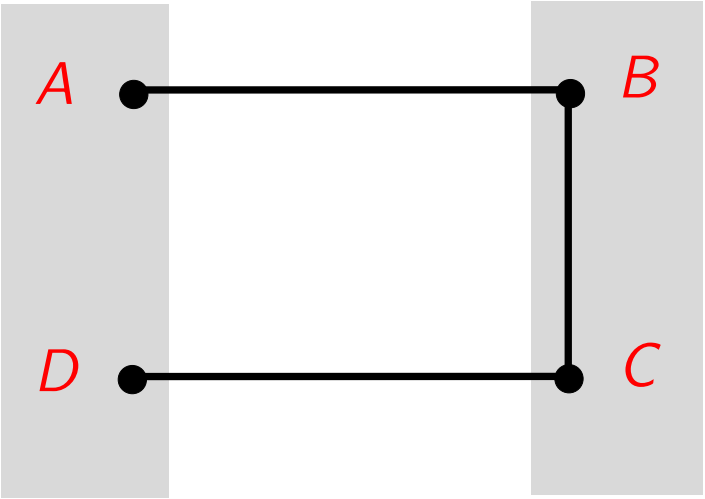
Intuition 2/5

$$STRONG = w(H_1, H_2) + w(UnH_1, UnH_2) + \sum_{i=1}^{2} w(H_i, UnH_{3-i})$$



Intuition 2/5

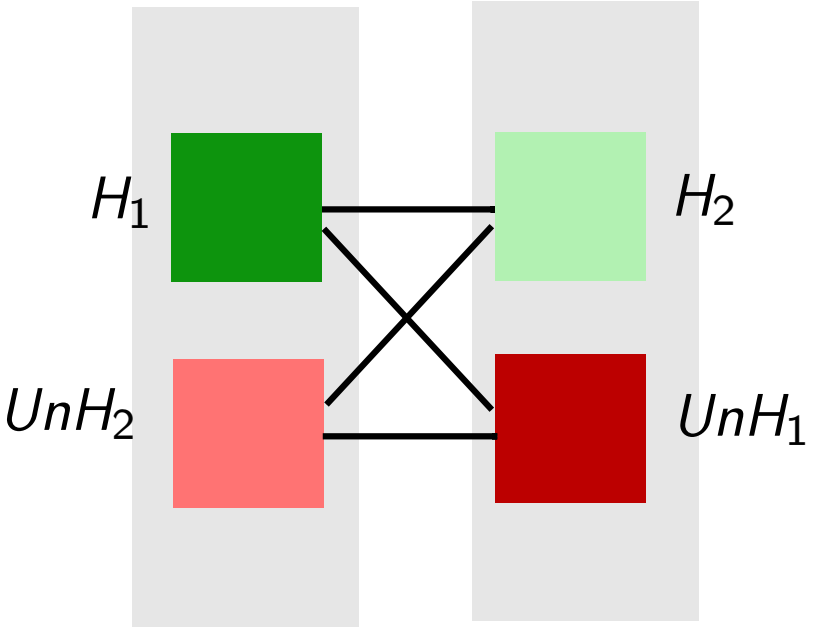
$$STRONG = w(H_1, H_2) + w(UnH_1, UnH_2) + \sum_{i=1}^{2} w(H_i, UnH_{3-i})$$



$$STRONG = w(A, B) + w(D, C) + w(A, C) + w(B, D)$$
$$= w(A, B) + w(D, C)$$

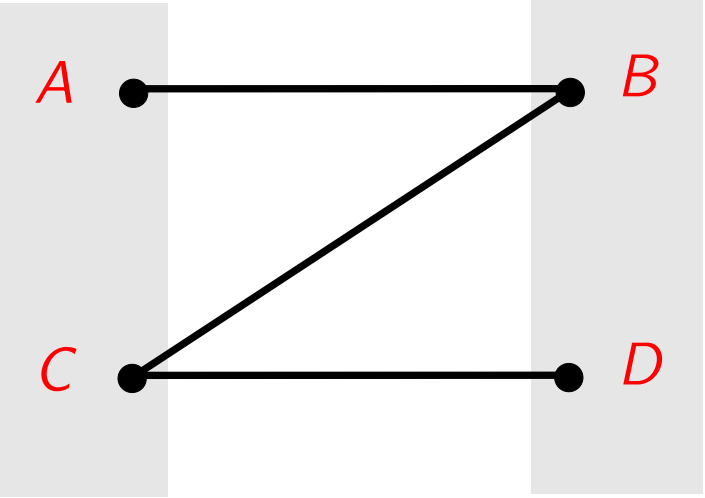
Intuition 3/5

$$OPT = w(H_1, H_2) + w(UnH_1, UnH_2) + \sum_{i=1}^{2} w(H_i, UnH_i)$$



Intuition 3/5

$$OPT = w(H_1, H_2) + w(UnH_1, UnH_2) + \sum_{i=1}^{2} w(H_i, UnH_i)$$



$$OPT = w(A, B) + w(D, C) + w(A, D) + w(B, C)$$
$$= w(A, B) + w(D, C) + w(B, C)$$

Intuition 4/5

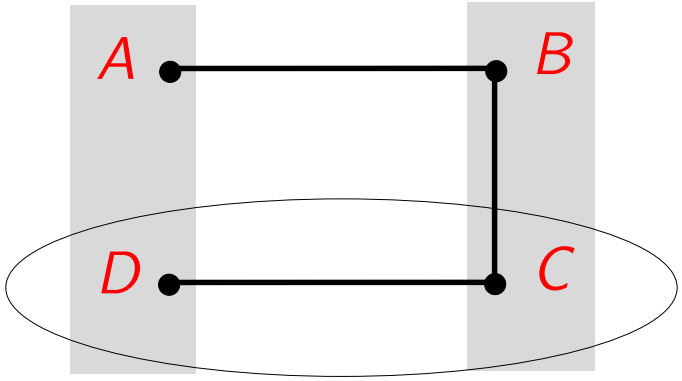
Des ensembles intéressant :

- $V_1 = UnH$,
- Pour $j \geq 1$, $V_{j+1} = \{v \in V_j : v$ gagne lorsque tous les joueurs de V_j bougent $\}$.
- q est le plus petit indice tq. $V_q = \emptyset$.

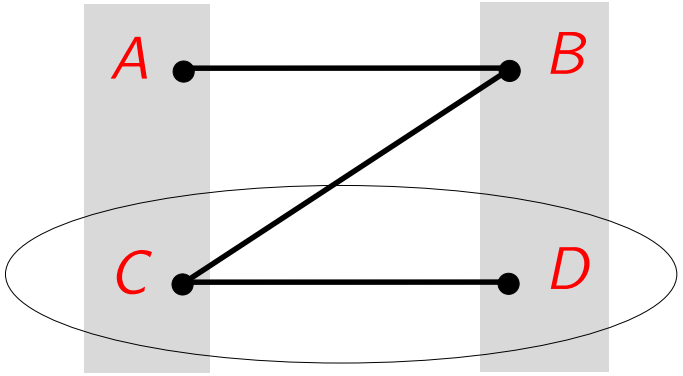
Intuition 4/5

Des ensembles intéressant :

- $V_1 = UnH$,
- Pour $j \geq 1$, $V_{j+1} = \{v \in V_j : v$ gagne lorsque tous les joueurs de V_j bougent $\}$.
- q est le plus petit indice tq. $V_q = \emptyset$.



V_1



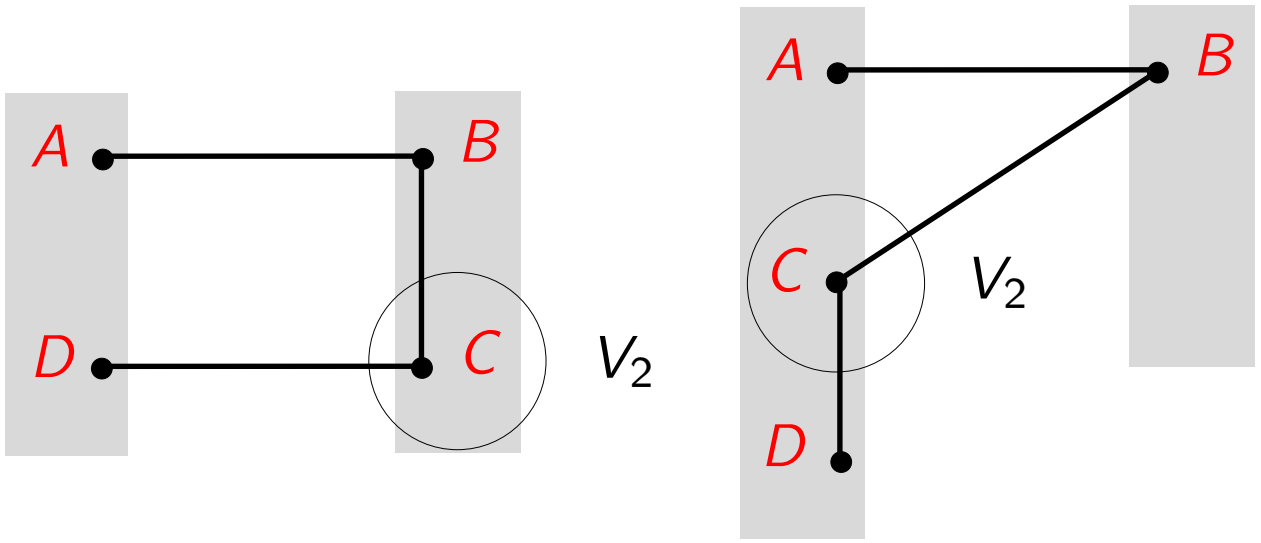
V_1

$V_1 = \{C, D\}$

Intuition 4/5

Des ensembles intéressant :

- $V_1 = UnH$,
- Pour $j \geq 1$, $V_{j+1} = \{v \in V_j : v$ gagne lorsque tous les joueurs de V_j bougent $\}$.
- q est le plus petit indice tq. $V_q = \emptyset$.

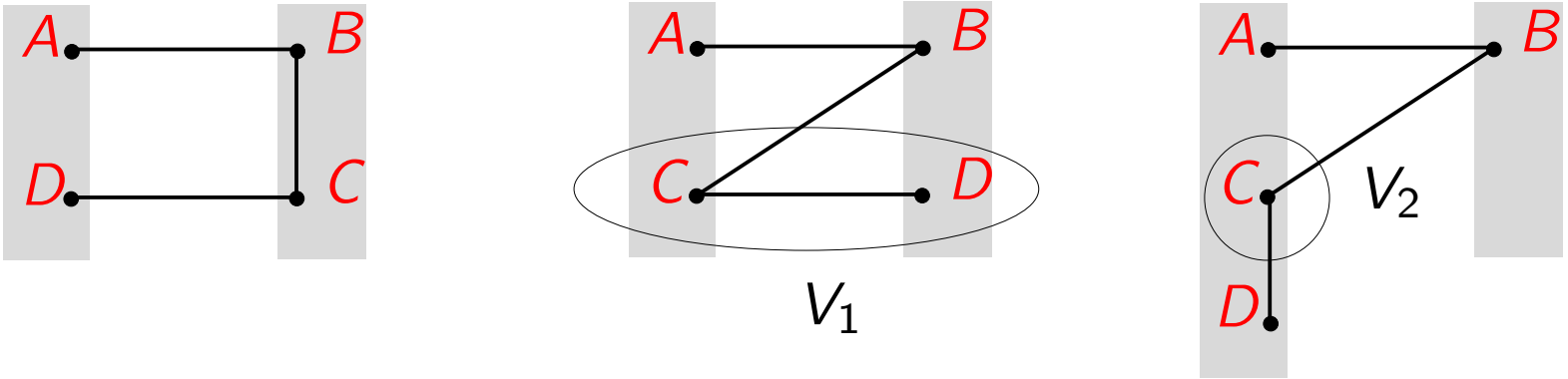


$V_1 = \{C, D\}$, $V_2 = \{C\}$ et $V_3 = \emptyset$

Intuition 4/5

Des ensembles intéressants :

- $V_1 = UnH$,
- Pour $j \geq 1$, $V_{j+1} = \{v \in V_j : v$ gagne lorsque tous les joueurs de V_j bougent $\}$.
- q est le plus petit indice tq. $V_q = \emptyset$.



$V_j \setminus V_{j+1}$ est donc l'ensemble des joueurs de V_j qui perdent lors de ce changement. $V_j \setminus V_{j+1} \neq \emptyset$ car σ est un équilibre fort.

Intuition 5/5

Soit $v \in V_j \setminus V_{j+1}$ et suppposons $v \in X_1$.

- L'utilité (la satisfaction) de v dans l'état σ vaut :

  $w(v, H_2) + w(v, UnH_2)$

- L'utilité de v lorsque les joueurs de V_j bougent vaut :

  $w(v, H_1) + w(v, UnH_1 \setminus V_j) + w(v, V_j \cap X_2)$

  $\geq w(v, H_1) + w(v, V_j \cap X_2)$

Intuition 5/5

Soit $v \in V_j \setminus V_{j+1}$ et suppposons $v \in X_1$.

- L'utilité (la satisfaction) de v dans l'état σ vaut :

  $w(v, H_2) + w(v, UnH_2)$

- L'utilité de v lorsque les joueurs de V_j bougent vaut :

  $w(v, H_1) + w(v, UnH_1 \setminus V_j) + w(v, V_j \cap X_2)$

  $\geq w(v, H_1) + w(v, V_j \cap X_2)$

v n'est pas satisfait par ces changements, donc :

$$w(v, H_2) + w(v, UnH_2 \setminus V_j) \geq w(v, H_1)$$

Intuition 5/5

Soit $v \in V_j \setminus V_{j+1}$ et suppposons $v \in X_1$.

- L'utilité (la satisfaction) de v dans l'état σ vaut :

  $w(v, H_2) + w(v, UnH_2)$

- L'utilité de v lorsque les joueurs de V_j bougent vaut :

  $w(v, H_1) + w(v, UnH_1 \setminus V_j) + w(v, V_j \cap X_2)$

  $\geq w(v, H_1) + w(v, V_j \cap X_2)$

v n'est pas satisfait par ces changements, donc :

$$w(v, H_2) + w(v, UnH_2 \setminus V_j) \geq w(v, H_1)$$

En additionnant les inégalités précédentes (et avec un peu de calcul) :

$$3STRONG \geq 2OPT$$

Complexité et équilibre k-fort

Pour le jeu max CUT, quelle est la complexité pour trouver un équilibre fort ?

Complexité et équilibre k-fort

Pour le jeu max CUT, quelle est la complexité pour trouver un équilibre fort ?

- Dans le cas général, c'est difficile car trouver un équilibre de Nash pour le jeu max CUT est déjà **PLS**-complet.
- Si le graphe n'est pas pondéré, on ne sait pas ! (polynomial pour un équilibre de Nash)

Complexité et équilibre k-fort

Pour le jeu max CUT, quelle est la complexité pour trouver un équilibre fort ?

- Dans le cas général, c'est difficile car trouver un équilibre de Nash pour le jeu max CUT est déjà **PLS**-complet.
- Si le graphe n'est pas pondéré, on ne sait pas ! (polynomial pour un équilibre de Nash)

Equilibre k-fort

Etat stable dont aucune coalition de moins de k joueurs ne peut dévier et tous les membres de la coalition y gagnent

Complexité et équilibre k-fort

Pour le jeu max CUT, quelle est la complexité pour trouver un équilibre fort ?

- Dans le cas général, c'est difficile car trouver un équilibre de Nash pour le jeu max CUT est déjà **PLS**-complet.
- Si le graphe n'est pas pondéré, on ne sait pas ! (polynomial pour un équilibre de Nash)

Equilibre k-fort

Etat stable dont aucune coalition de moins de k joueurs ne peut dévier et tous les membres de la coalition y gagnent

k-SPoA

Quantifier, dans le pire cas, le rapport entre le bien-être social d'un équilibre k-fort et l'optimum social

Limitation de la taille des coalitions 1/4

Théorème

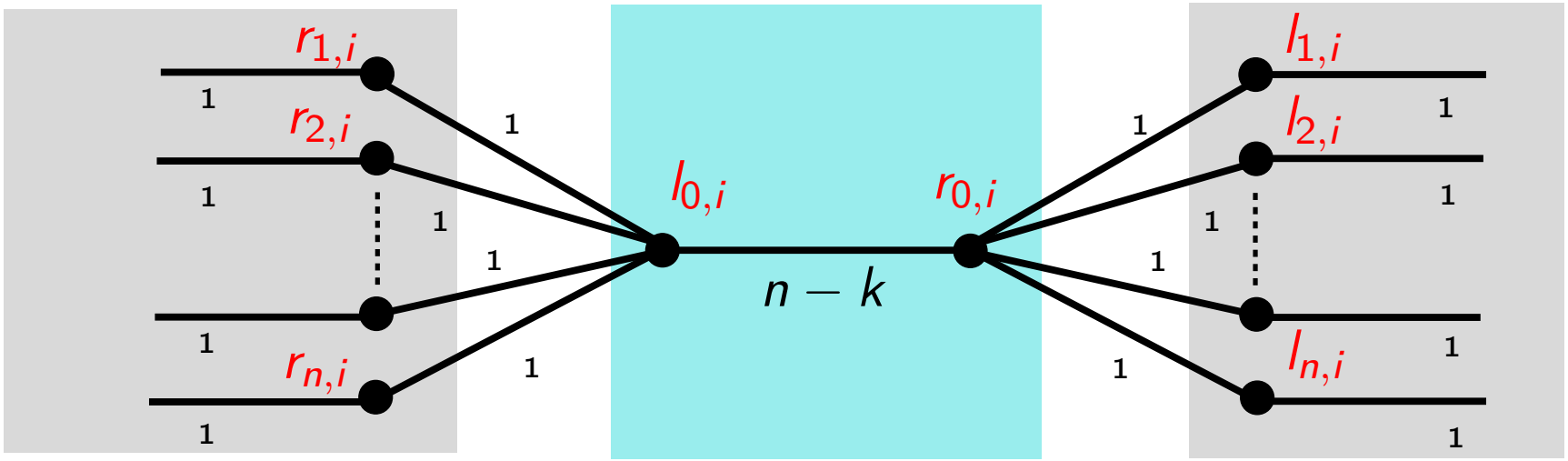
Pour le jeu max CUT, $\forall \varepsilon > 0$, $O(|V|^{1/2-\varepsilon})$-SPoA=PoA= 1/2

Limitation de la taille des coalitions 1/4

Théorème

Pour le jeu max CUT, $\forall \varepsilon > 0$, $O(|V|^{1/2-\varepsilon})$-SPoA=PoA= 1/2

Soient $k \geq 0$ et $n > k$. Considérons le graphe biparti $G_i(k)$ suivant :

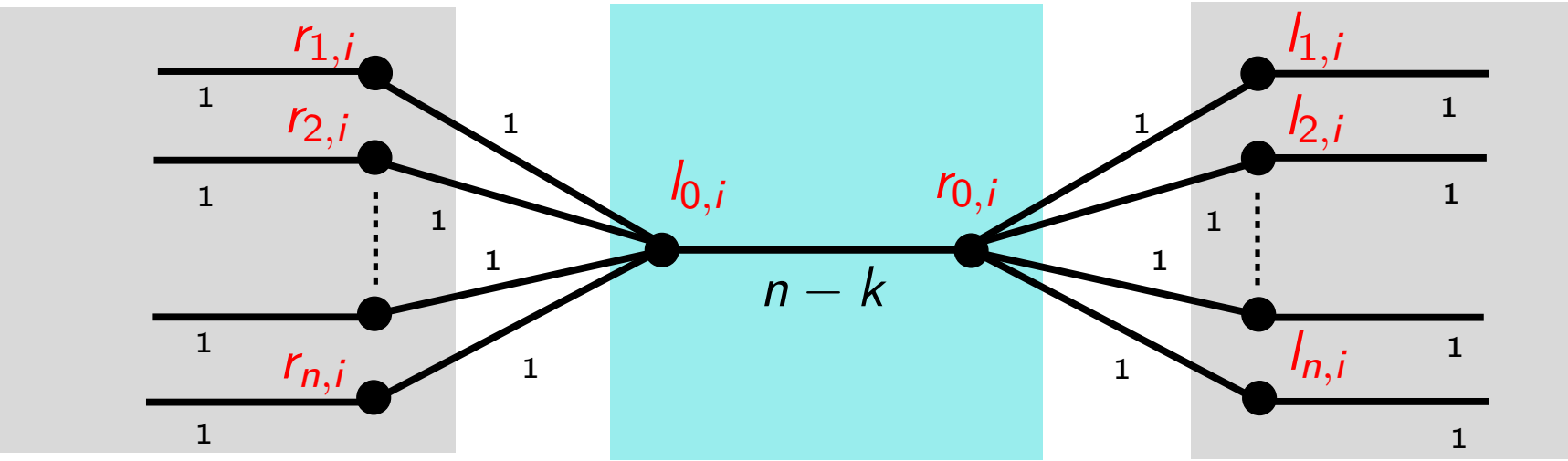


- L'utilité de $l_{i,j}$ ou de $r_{i,j}$ est 1.
- L'utilité de $l_{0,i}$ ou de $r_{0,i}$ est n.

Limitation de la taille des coalitions 2/4

Supposons :

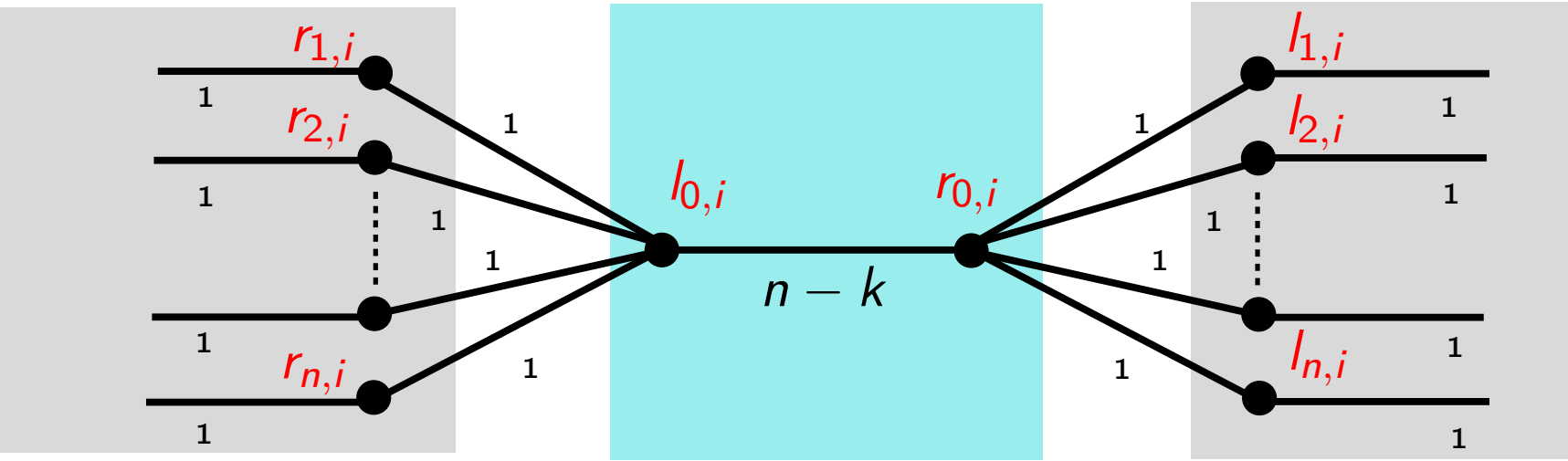
σ est un équilibre de Nash et n'est pas un équilibre k-fort.



Limitation de la taille des coalitions 2/4

Supposons :

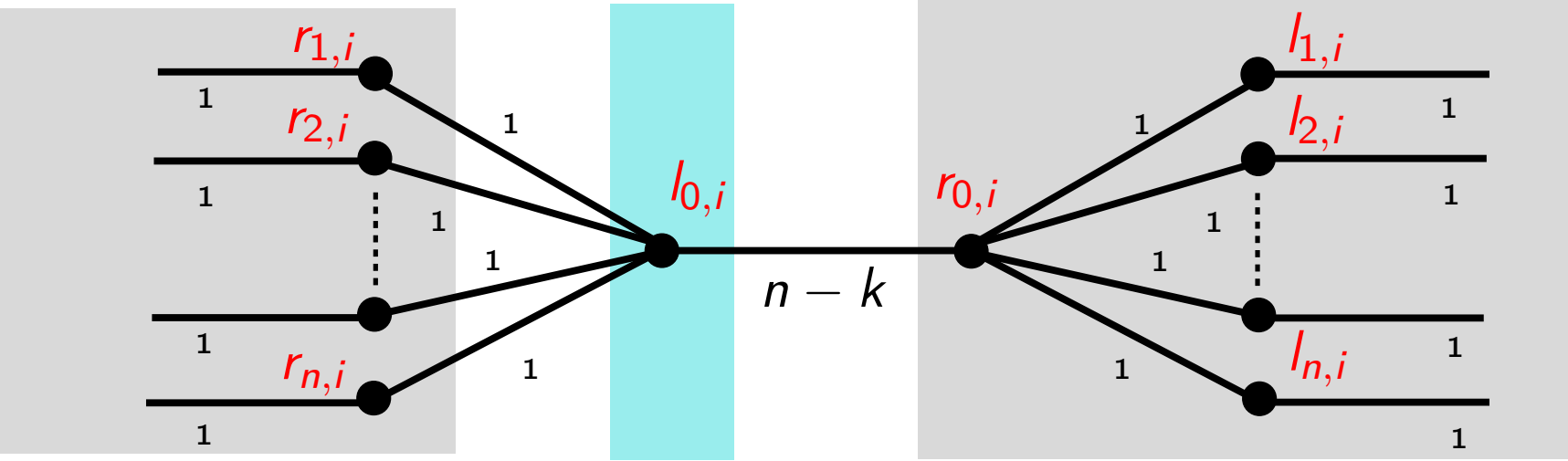
σ est un équilibre de Nash et n'est pas un équilibre k-fort.



Ainsi, $r_{i,0}$ ou $l_{i,0}$ bouge (mais pas les deux).

Limitation de la taille des coalitions 3/4

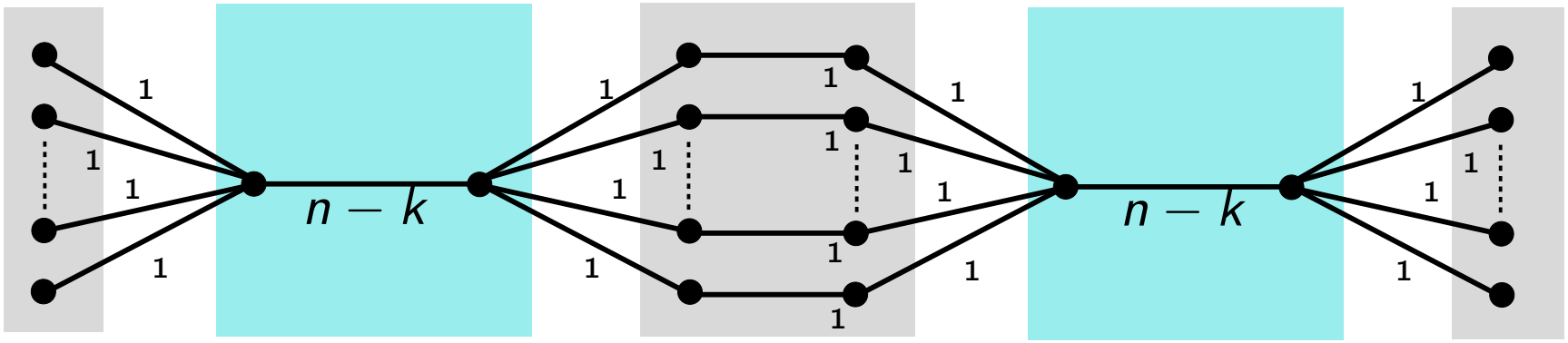
Supposons que $r_{i,0}$ bouge.



Il perd n et gagne au plus $n-k$ tout seul. Il faut donc que $k+1$ sommets parmi $\{l_{1,i}, \ldots, l_{n,i}\}$ bougent également !

Limitation de la taille des coalitions 4/4

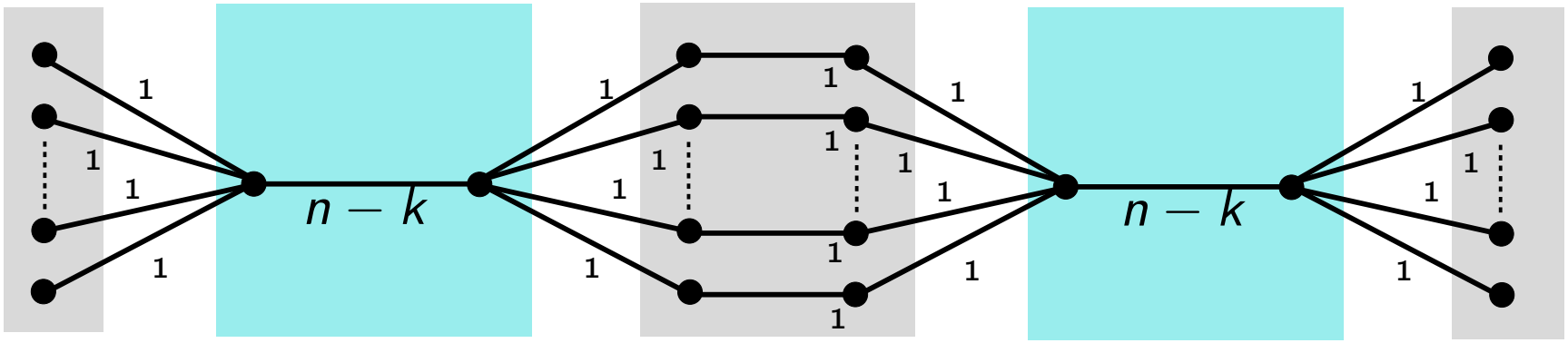
Considérons le graphe biparti $G(k)$ construit à partir de n copies du graphe $G_i(k)$.



Exemple avec $n = 2$.

Limitation de la taille des coalitions 4/4

Considérons le graphe biparti $G(k)$ construit à partir de n copies du graphe $G_i(k)$.



Exemple avec $n = 2$.

$V = 2n(n+1)$, $sw(\sigma) = 2n^2$ et $OPT = 4n^2 - n(k+1)$.

D'ou si $k = O(|V|^{1/2-\varepsilon})$, k-SPoA$= 1/2$.

Et MAX k CUT ?

Partitionner les sommets du graphe en k parties (k dortoirs).

Jeu associé (jeu MAX k CUT)

- n joueurs $v \in V$
- chaque joueur a pour ensemble de stratégies $\{1, \ldots, k\}$
- un état du jeu σ appartient à $\{1, \ldots, k\}^n$
- $u_v(\sigma) = \sum_{v' \in V : \sigma(v') \neq \sigma(v)} w([v, v'])$ est l'utilité de $v \in V$
- $sw(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} u_v(\sigma)$ est le bien-être social de l'état σ

Et MAX k CUT ?

Partitionner les sommets du graphe en k parties (k dortoirs).

Jeu associé (jeu MAX k CUT)

- n joueurs $v \in V$
- chaque joueur a pour ensemble de stratégies $\{1, \ldots, k\}$
- un état du jeu σ appartient à $\{1, \ldots, k\}^n$
- $u_v(\sigma) = \sum_{v' \in V : \sigma(v') \neq \sigma(v)} w([v, v'])$ est l'utilité de $v \in V$
- $sw(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} u_v(\sigma)$ est le bien-être social de l'état σ

Théorème

Pour le jeu MAX k CUT :

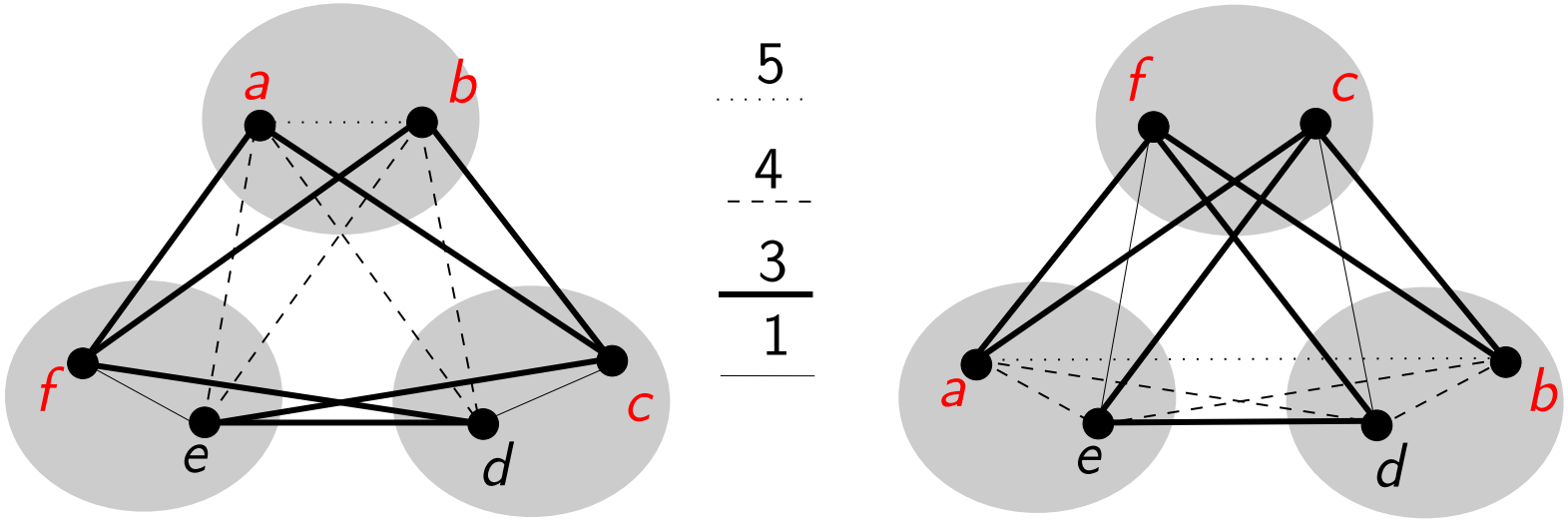
- Un équilibre de Nash existe toujours,
- Le prix de l'anarchie $PoA = \frac{k-1}{k}$

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

Pour le jeu MAX 3-CUT, une 3-coupe optimale σ^* n'est pas toujours un équilibre fort.

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

Pour le jeu MAX 3-CUT, une 3-coupe optimale σ^* n'est pas toujours un équilibre fort.



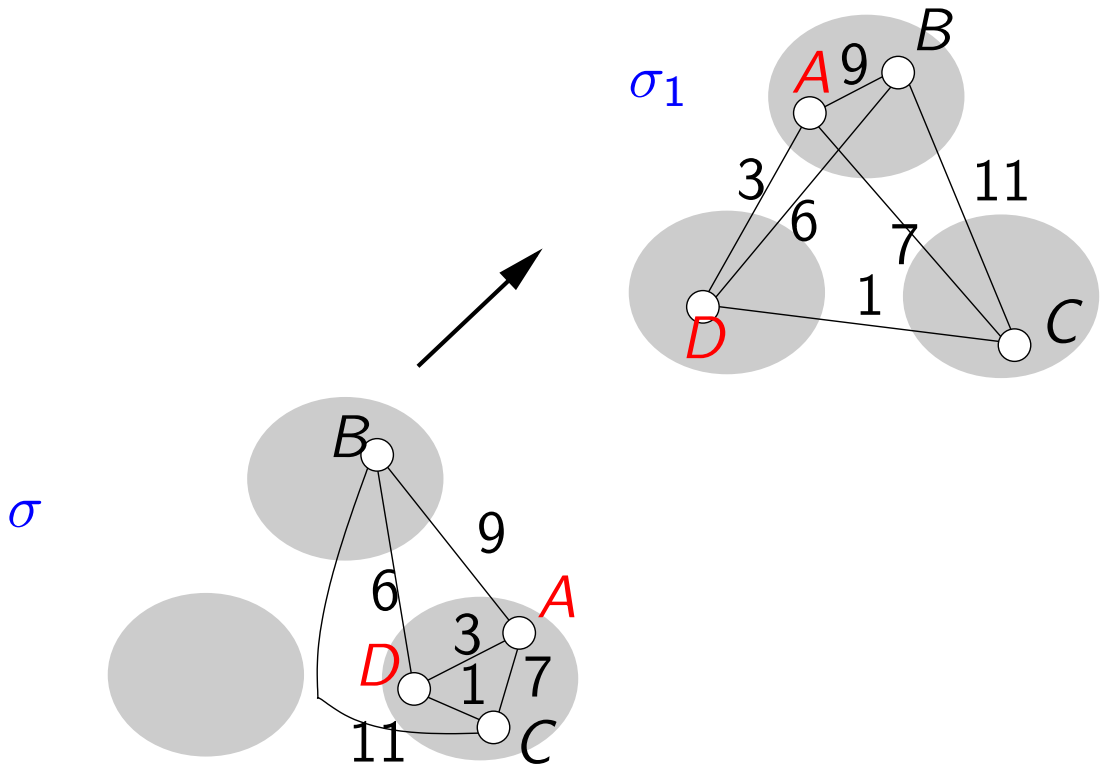
- A gauche, une 3-coupe optimale σ^* (elle est unique) de valeur 37 ($u_a(\sigma^*) = u_b(\sigma^*) = 14$ et $u_c(\sigma^*) = u_f(\sigma^*) = 9$)
- $S = \{a, b, c, f\}$ est une coalition augmentante pour σ^* ($u_a(\sigma^*) = u_b(\sigma^*) = 15$ et $u_c(\sigma^*) = u_f(\sigma^*) = 10$)
- A droite, un équilibre fort σ de valeur 36

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

Le graphe des états améliorants possède des circuits.

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

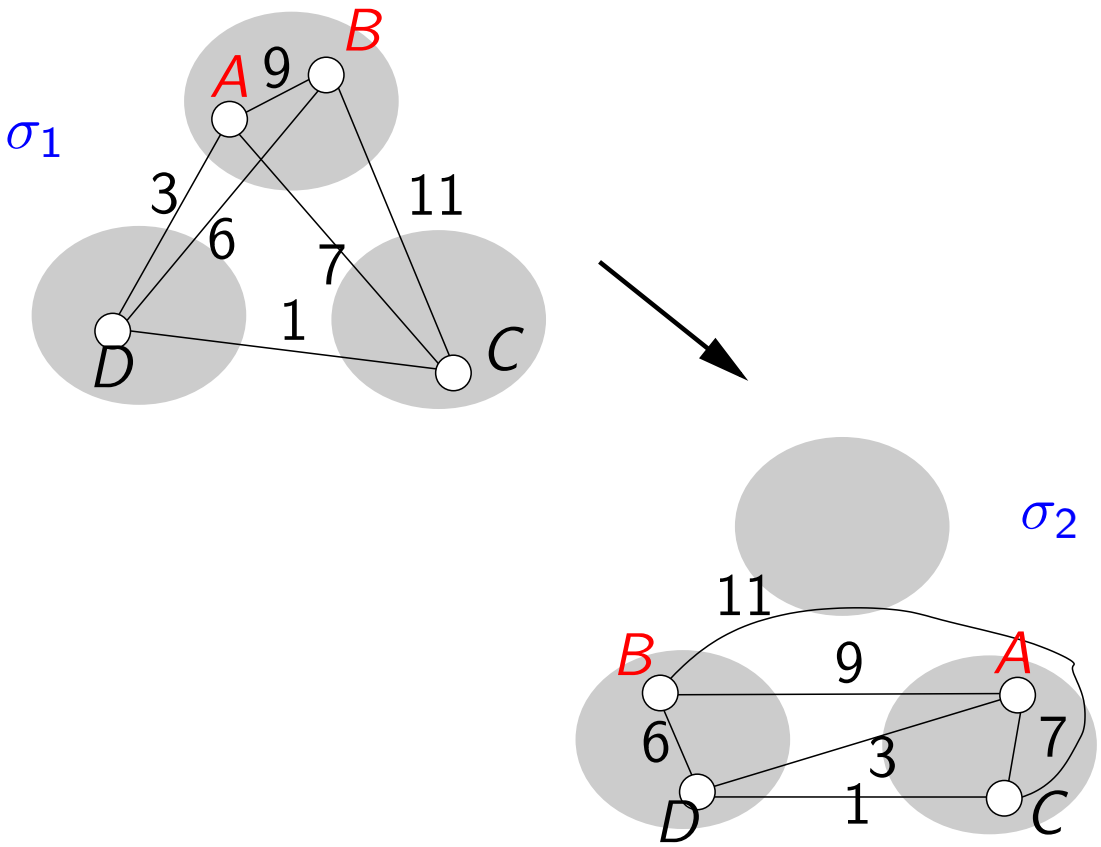
Le graphe des états améliorants possède des circuits.



$S_1 = \{A, D\}$ est une coalition augmentante pour σ ($u_A(\sigma) = 9$, $u_D(\sigma) = 6$ et $u_A(\sigma_1) = u_D(\sigma_1) = 10$)

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

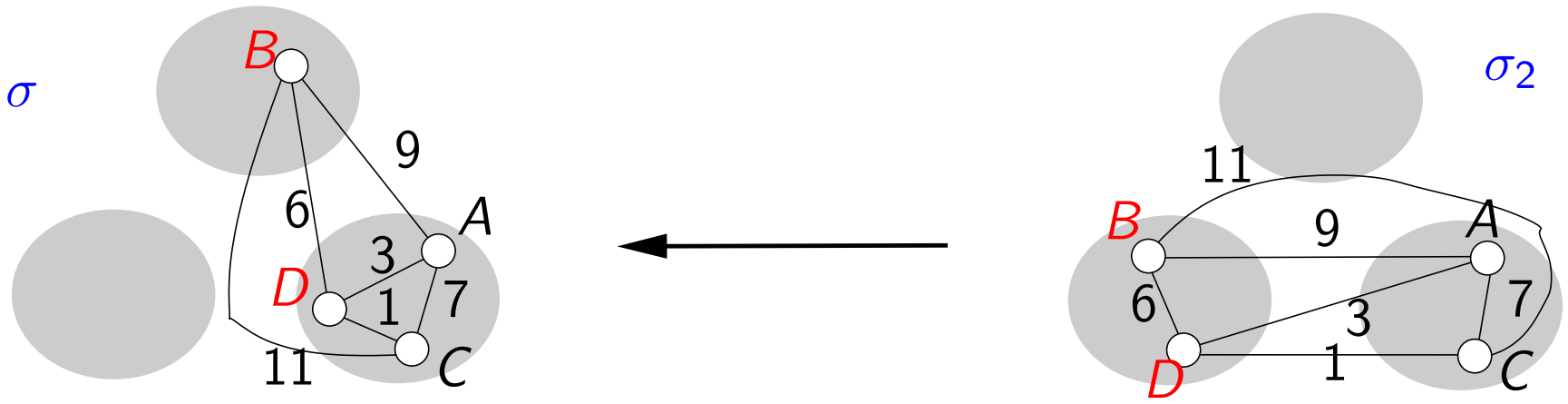
Le graphe des états améliorants possède des circuits.



$S_2 = \{A, B\}$ est une coalition augmentante pour σ_1 ($u_A(\sigma_1) = 10$, $u_B(\sigma_1) = 17$ et $u_A(\sigma_2) = 12$ et $u_B(\sigma_1) = 20$)

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

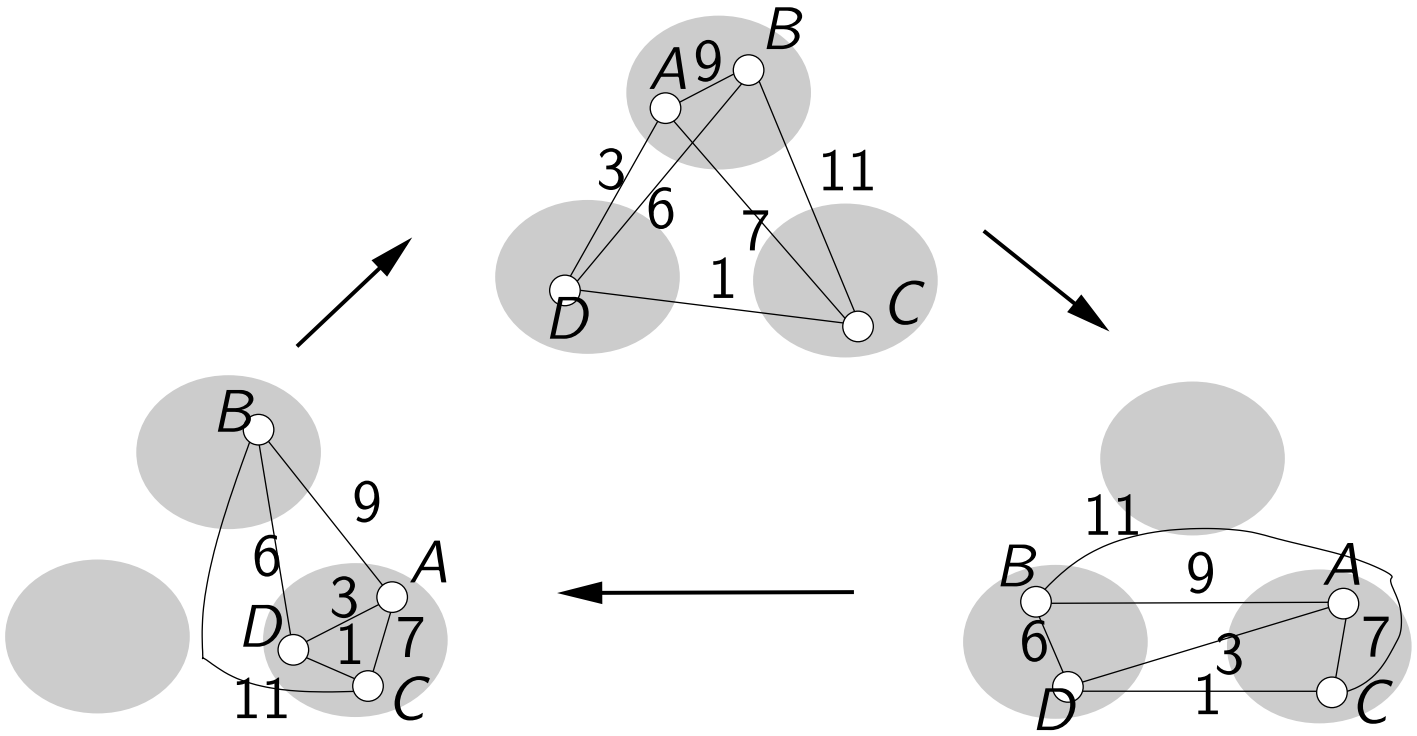
Le graphe des états améliorants possède des circuits.



$S_3 = \{B, D\}$ est une coalition augmentante pour σ_2 ($u_B(\sigma_2) = 20$, $u_D(\sigma_2) = 4$ et $u_B(\sigma) = 26$ et $u_D(\sigma) = 6$)

MAX 3-CUT, tout ne va pas si bien...

Le graphe des états améliorants possède des circuits.



Merci !